

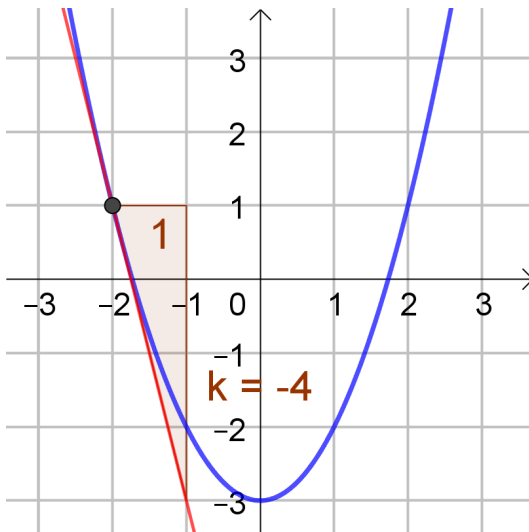
4.1

- a) Funktion $f(x) = x^2 - 3$ derivaatta kohdassa -2 on funktion kuvaajalle kohtaan $x = -2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = -2$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = -2$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



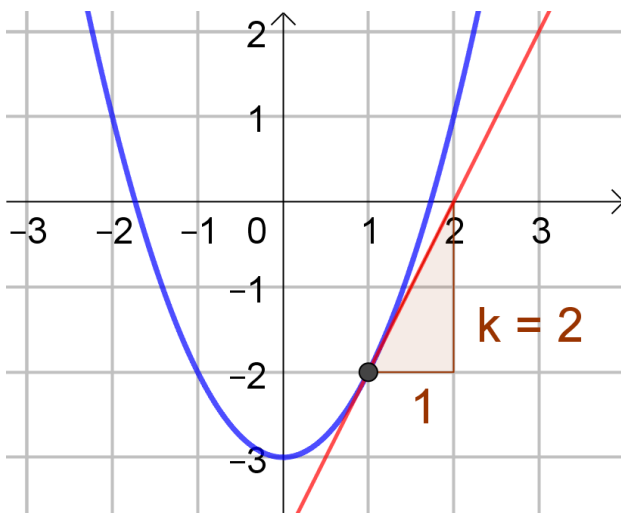
Tangentin kulmakertoimeksi saadaan -4 . Siten $f'(-2) = -4$.

- b) Funktion derivaatta $f'(1)$ on funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Merkitään funktion f kuvaajalle piste kohtaan $x = 1$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 2. Siten $f'(1) = 2$.

Vastaus

a) -4

b) 2

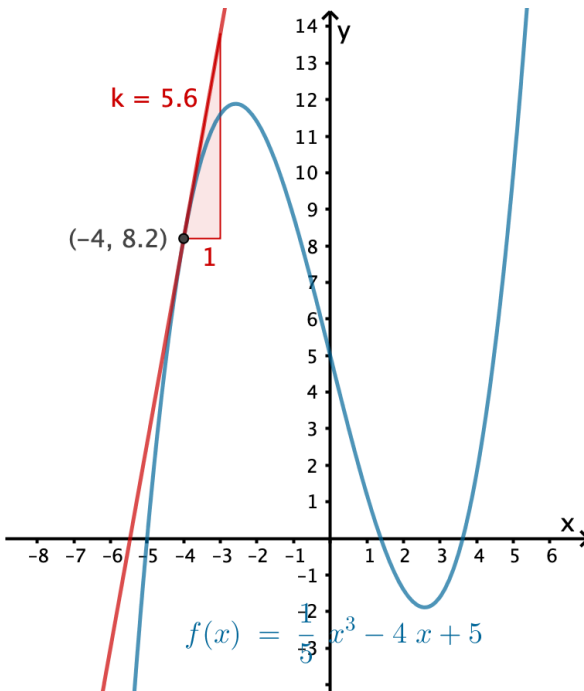
4.2

- a) Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 4x + 5$ derivaatta kohdassa -4 on funktion kuvaajalle kohtaan $x = -4$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = -4$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = -4$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



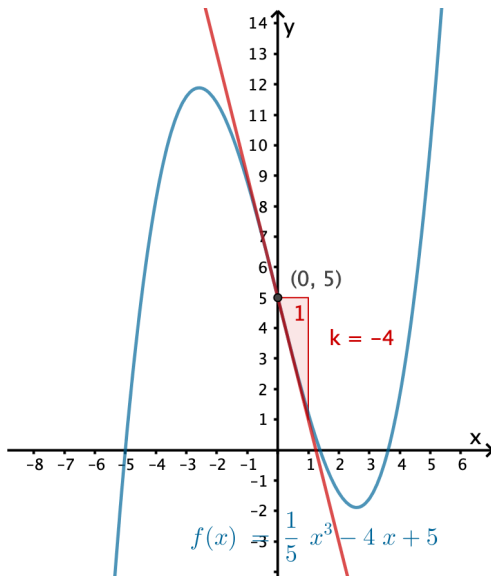
Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 5,6. Siten $f'(-4) = 5,6$.

- b) Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 4x + 5$ derivaatta kohdassa 0 on funktion kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = 0$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 0$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



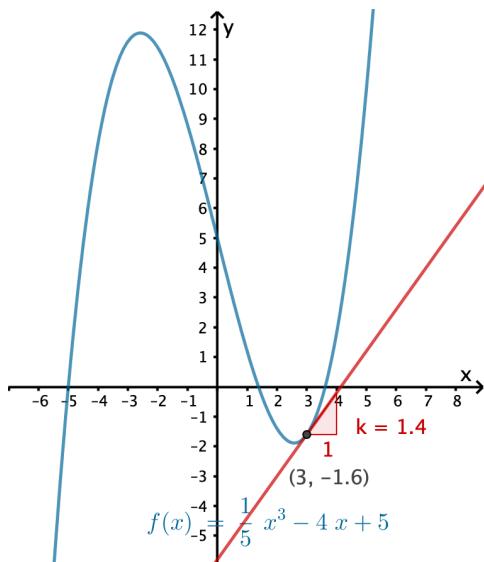
Tangentin kulmakertoimeksi saadaan -4 . Siten $f'(0) = -4$.

- c) Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 4x + 5$ derivaatta kohdassa 3 on funktion kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = 3$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 3$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 1,4. Siten $f'(3) = 1,4$.

Vastaus

- a) 5,6
- b) -4
- c) 1,4

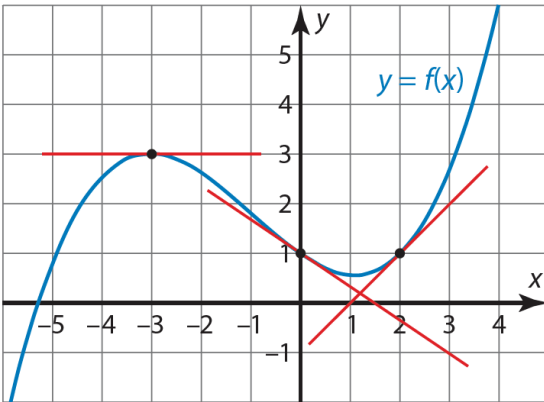
4.3

- a) Funktion $f(x) = 5x - 7$ kuvaaja on suora $y = 5x - 7$, jonka kulmakerroin on 5. Koska funktion f kuvaaja on joka kohdassa oma tangenttinsa, on joka kohdassa $f'(x) = 5$.
- b) Funktion $g(x) = -4x + 1$ kuvaaja on suora $y = -4x + 1$, jonka kulmakerroin on -4 . Koska funktion g kuvaaja on joka kohdassa oma tangenttinsa, on joka kohdassa $g'(x) = -4$.
- c) Funktion $h(x) = 7$ kuvaaja on suora $y = 7$, jonka kulmakerroin on 0. Koska funktion h kuvaaja on joka kohdassa oma tangenttinsa, on joka kohdassa $h'(x) = 0$.

Vastaus

- a) $f'(x) = 5$
b) $g'(x) = -4$
c) $h'(x) = 0$

4.4



- a) Derivaatta on tangentin kulmakerroin. Määritetään kuvaan piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.

$$f'(-3) = 0$$

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$$

- b) Määritetään kuvaan piirrettyjen pisteiden y -koordinaatit.

$$(-3, 3): \quad f(-3) = 3$$

$$(0, 1): \quad f(0) = 1$$

$$(2, 1): \quad f(2) = 1$$

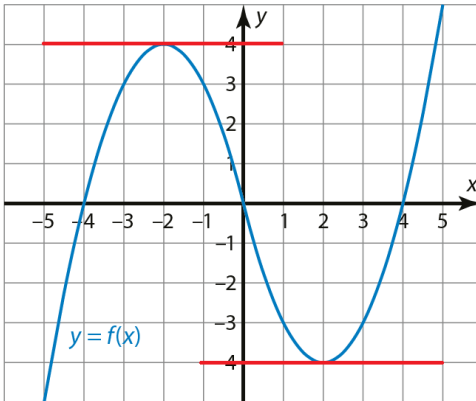
Vastaus

a) $f'(-3) = 0$, $f'(0) = -\frac{2}{3}$ ja $f'(2) = 1$

b) $f(-3) = 3$, $f(0) = 1$ ja $f(2) = 1$

4.5

- a) Derivaatta $f'(x)$ on kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentin kulmakerroin on 0 niissä kohdissa, joissa tangentti on vaakasuora. Kuvan perusteella tangentti on vaakasuora kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$.



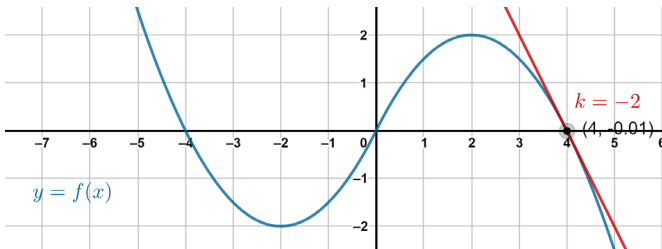
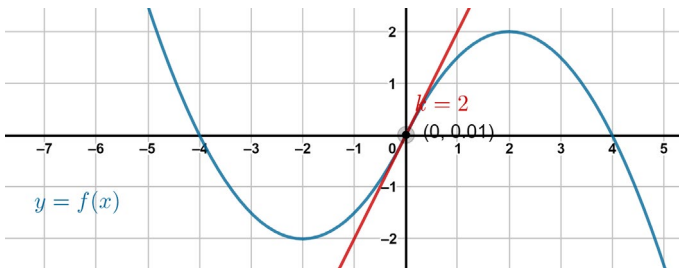
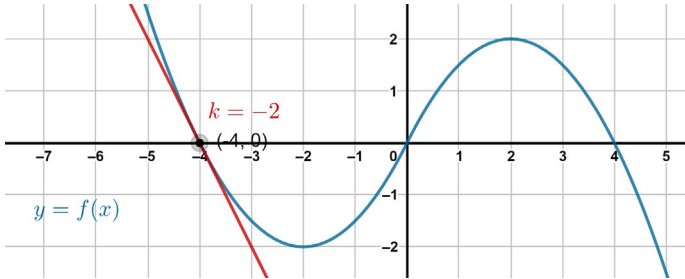
- b) Kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on epänegatiivinen niissä kohdissa, joissa tangentti on vaakasuora tai nouseva suora. Kuvan perusteella näin on välillä $x \leq -2$ ja välillä $x \geq 2$.

Vastaus

- a) $x = -2$ tai $x = 2$
b) $x \leq -2$ tai $x \geq 2$

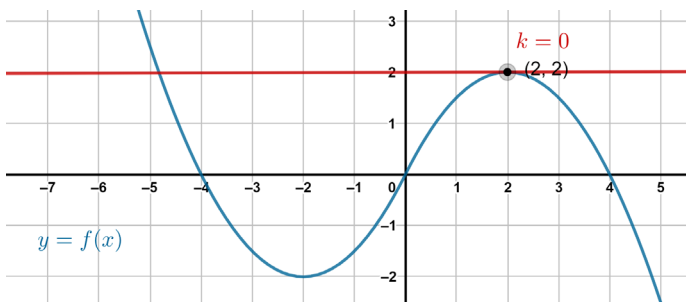
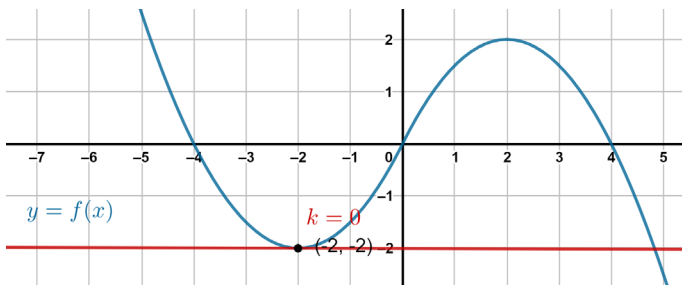
4.6

- a) Yhtälö $f(x) = 0$ toteutuu funktion nollakohdissa, eli kohdissa, joissa kuvaaja leikkaa x -akselin.



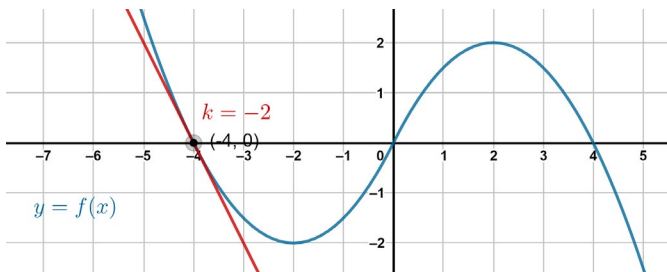
Funktion f nollakohdat ovat $x = -4$, $x = 0$ ja $x = 4$.

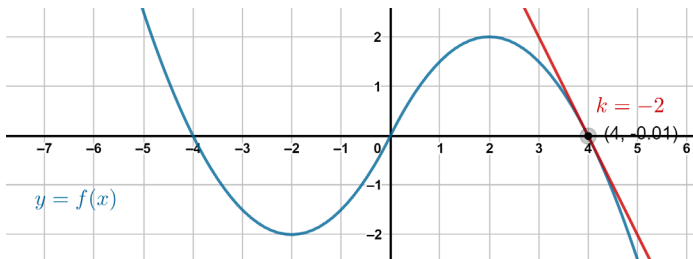
- b) Derivaatta $f'(x)$ on kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin. $f'(x) = 0$ eli tangentin kulmakerroin on 0 niissä kohdissa, joissa tangentti on vaakasuora.



$f'(x) = 0$ kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$.

- c) Derivaatta $f'(x)$ on kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin.





$f'(x) = -2$ eli tangentin kulmakerroin on -2
kohdissa $x = -4$ ja $x = 4$.

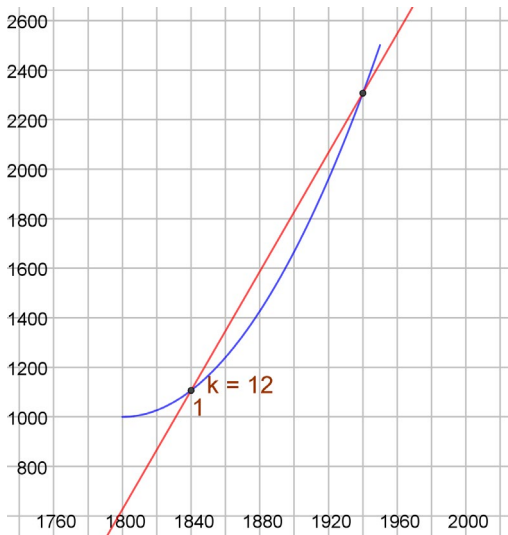
Vastaus

- a) $x = -4$ tai $x = 0$ tai $x = 4$
- b) $x = -2$ tai $x = 2$
- c) $x = -4$ tai $x = 4$

4.7

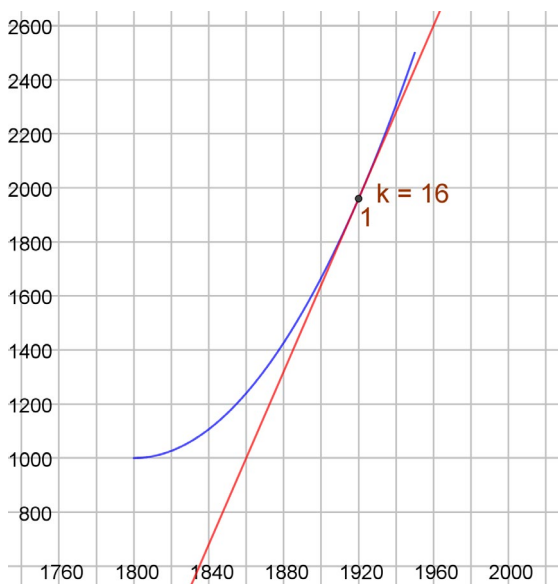
- a) Funktion $f(x) = \frac{1}{15}x^2 - 240x + 217000$ keskimääräisen muutosnopeuden ilmaisee kuvaajan pisteiden kautta piirretyn sekantin kulmakerroin.

Piirretään funktion kuvaaja ja merkitään kuvaajalle pisteet kohtiin $x = 1840$ ja $x = 1940$. Piirretään pisteiden kautta kulkeva sekantti ja määritetään sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakertoimeksi saadaan 12. Keskimääräinen kasvunopeus vuosien 1840 ja 1940 välisenä aikana oli 12 miljoonaa ihmistä/vuosi.

- b) Hetkellisen kasvunopeuden vuoden 1920 alussa ilmaisee derivaatta kohdassa $x = 1920$. Merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = 1920$, piirretään pisteeseen kuvaajan tangentti ja määritetään tangentin kulmakerroin.

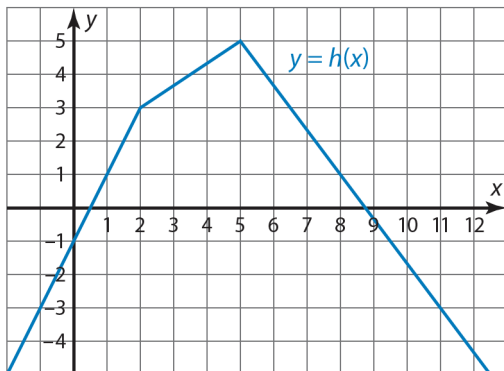


Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 16. Siten väkiluvun hetkellinen kasvunopeus vuoden 1920 alussa oli 16 miljoonaa ihmistä/vuosi.

Vastaus

- a) 12 miljoonaa ihmistä/vuosi
- b) 16 miljoonaa ihmistä/vuosi

4.8



Kun funktion kuvaaja on suora, niin tämä suora on itsensä tangentti jokaisessa kohdassa. Derivaatta on tällöin tämän suoran kulmakerroin.

a) $x < 2$:
$$h'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$$

b) $2 < x < 5$:
$$h'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$$

c) $x > 5$:
$$h'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

d) Kuvaajan kohtiin, joissa $x = 2$ tai $x = 5$, ei voi piirtää yksikäsitteistä tangenttia. Siksi näissä kohdissa funktiolla h ei ole derivaattaa.

Vastaus

a) $h'(x) = 2$

b) $h'(x) = \frac{2}{3}$

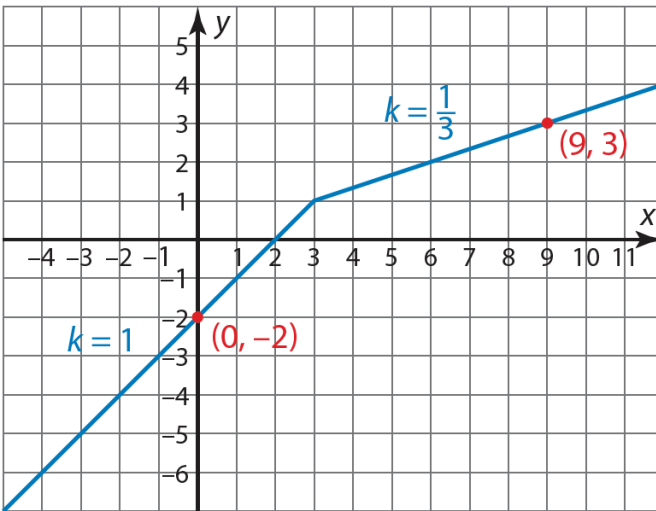
c) $h'(x) = -\frac{4}{3}$

d) derivaattaa ei ole olemassa kohdissa 2 ja 5

4.9

- 1) Koska $f(0) = -2$ ja $f'(x) = 1$, kun $x < 3$, niin alueessa $x < 3$ funktion kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 1 ja joka kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta.
- 2) Koska funktion kuvaaja on katkeamaton murtoviiva ja alueessa $x > 3$ $f'(x) = \frac{1}{3}$, niin alueessa $x \geq 3$ funktion kuvaaja on puolisuora, jonka kulmakerroin on $\frac{1}{3}$ ja joka jatkaa katkeamatta kohdassa 1 piirrettyä suoraa.

Piirretään kuvaaja geometriaohjelmalla ja määritetään kuvaajalta piste, jossa $x = 9$.



Kuvaajan perusteella $f(9) = 3$.

Vastaus

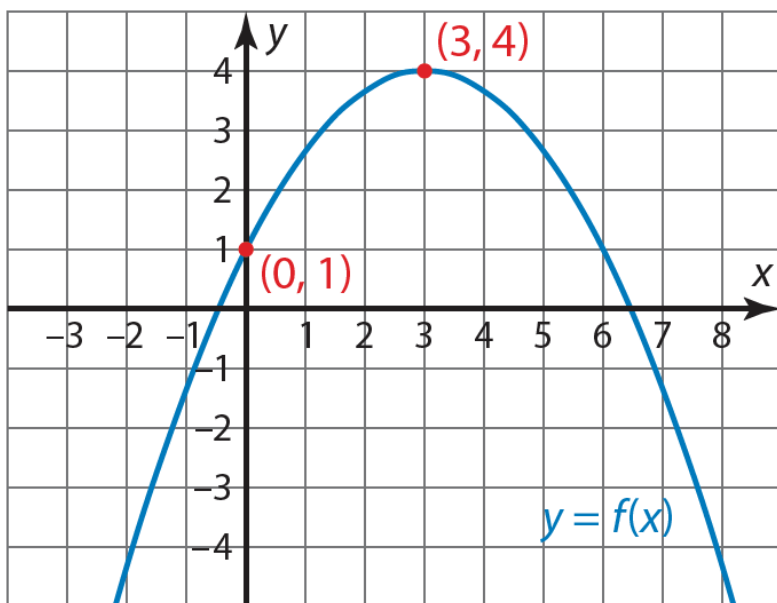
$$f(9) = 3$$

4.10

$f(0) = 1$ ja $f(3) = 4$, joten funktion kuvaaja kulkee pisteiden $(0, 1)$ ja $(3, 4)$ kautta.

$f'(x) < 0$, kun $x < 3$, $f'(3) = 0$ ja $f'(x) > 0$, kun $x > 3$, joten funktion kuvaaja nousee alueessa $x < 3$, laskee alueessa $x > 3$ ja kuvaajalla on ”mäenhuippu” kohdassa $x = 3$.

Kuvaajaksi kelpaa esimerkiksi alaspäin aukeava paraabeli, joka kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta ja jonka huippu on kohdassa $(3, 4)$.



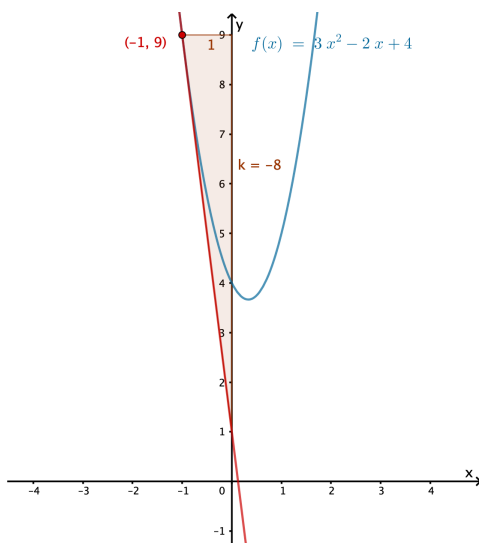
4.11

- a) Funktion $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ derivaatta $f'(-1)$ on funktion kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään kuvaajalle piste kohtaan $x = -1$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = -1$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



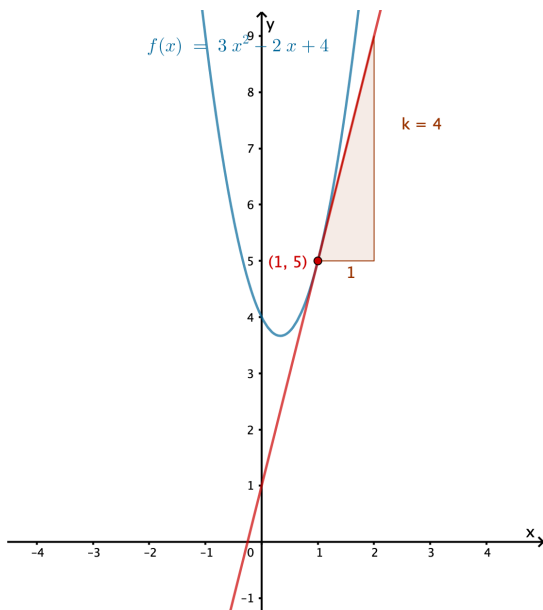
Tangentin kulmakertoimeksi saadaan -8 . Siten $f'(-1) = -8$.

- b) Funktion arvojen hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on derivaatta $f'(1)$.

Merkitään funktion f kuvaajalle piste kohtaan $x = 1$.

Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$.

Määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 4. Siten funktion arvojen hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on 4.

Vastaus

- a) -8
- b) 4

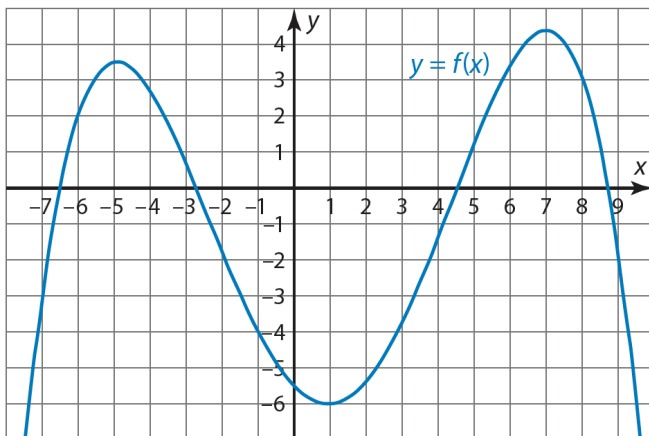
4.12

- a) Funktion $f(x) = x + 4$ kuvaaja on suora $y = x + 4$, jonka kulmakerroin on 1. Koska funktion f kuvaaja on joka kohdassa oma tangenttinsa, on joka kohdassa $f'(x) = 1$.
- b) Funktion $g(x) = -x$ kuvaaja on suora $y = -x$, jonka kulmakerroin on -1 . Koska funktion g kuvaaja on joka kohdassa oma tangenttinsa, on joka kohdassa $g'(x) = -1$.
- c) Funktion $h(x) = -17$ kuvaaja on suora $y = -17$, jonka kulmakerroin on 0. Koska funktion h kuvaaja on joka kohdassa oma tangenttinsa, on joka kohdassa $h'(x) = 0$.

Vastaus

- a) $f'(x) = 1$
b) $g'(x) = -1$
c) $h'(x) = 0$

4.13



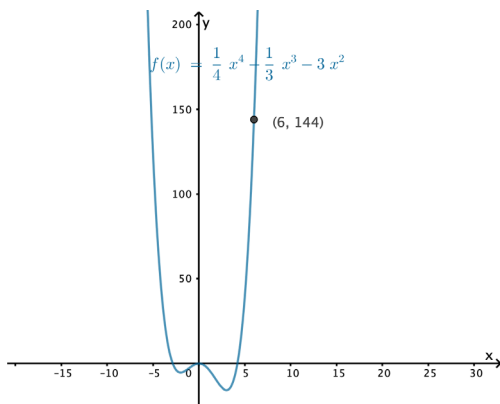
- a) Derivaatta $f'(x)$ on kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentin kulmakerroin on 0 niissä kohdissa, joissa tangentti on vaakasuora. Kuvan perusteella tangentti on vaakasuora kohdissa $x = -5$, $x = 1$ ja $x = 7$.
- b) Kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen niissä kohdissa, joissa tangentti on laskeva suora. Kuvan perusteella näin on välillä $-5 < x < 1$ ja välillä $x \geq 7$.

Vastaus

- a) $x = -5$, $x = 1$ ja $x = 7$
b) $-5 < x < 1$ tai $x \geq 7$

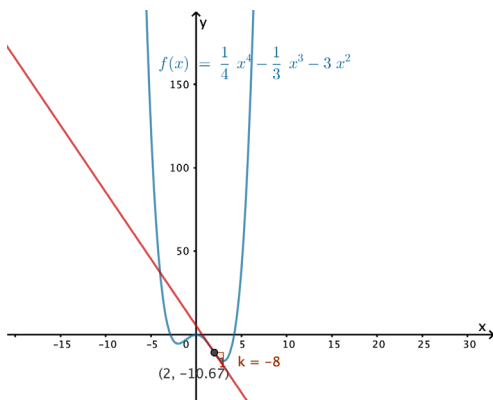
4.14

- a) Piirretään funktion f kuvaaja ja määritetään kohtaan $x = 6$ piirretyn pisteen y -koordinaatti.

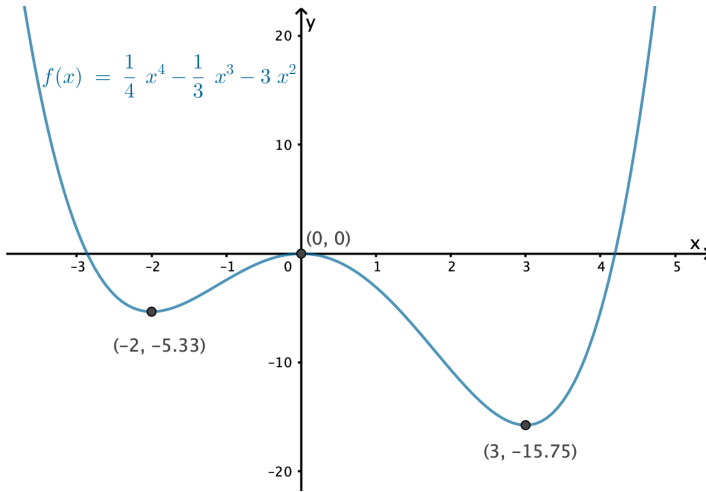


Saadaan $f(6) = 144$.

- b) Määritetään kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.



- c) Kohdissa, joissa derivaatta on nolla, funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangentti on vaakasuora. (Nämä kohdat löytyvät esim geometriaohjelman ääriarvot-työkalulla.)



Saadaan derivaatan nollakohdiksi $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 3$.

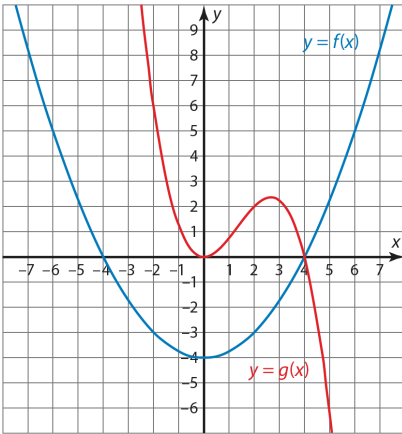
Vastaus

a) $f(6) = 144$

b) $f'(2) = -8$

c) $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 3$

4.15



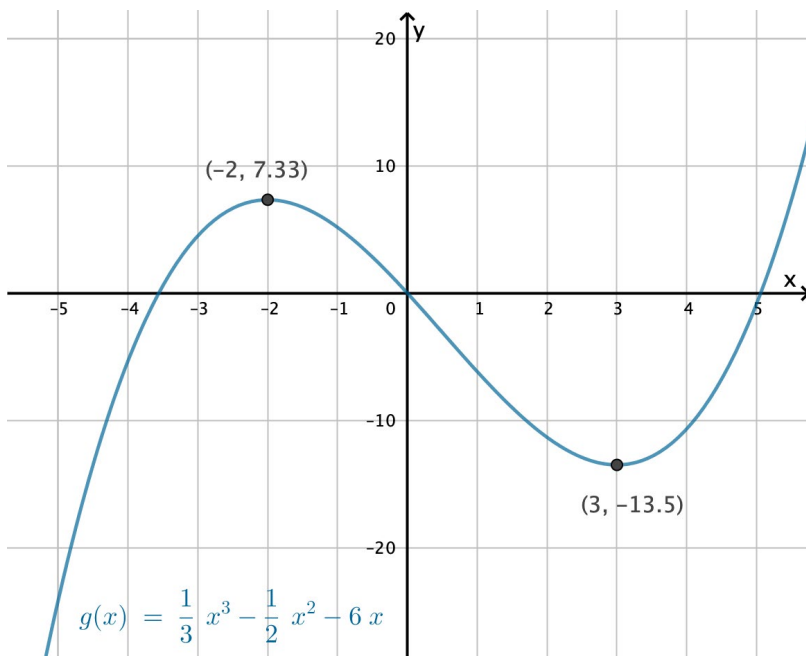
- a) Väittämä on väärin, sillä $f'(x)$:n ainoa nollakohta on $x = 0$.
- b) Väittämä on oikein, sillä $g'(x) < 0$ aina kun g on vähenevä, kuten on kohdassa $x = 4$.
- c) Väittämä on oikein, sillä $f'(2) = 1$ ja $g'(2) = 1$.
- d) Väittämä on väärin, sillä funktion g kuvaajan tangentti laskee kohdassa $x = -2$ jyrkemmin kuin funktion f kuvaajan tangentti, eli $g'(-2) < f'(-2)$.
- e) Väittämä on oikein, sillä kohdassa $x = 5$ funktion f kuvaaja kulkee ylempänä kuin funktion g kuvaaja
- f) Väittämä on oikein, sillä funktion f derivaatan ainoa nollakohta on $x = 0$ ja myös $g'(0) = 0$.

Vastaus

- a) väärin b) oikein c) oikein d) väärin e) oikein f) oikein

4.16

Piirretään funktion g kuvaaja ja etsitään derivaatan nollakohdat. Päätellään vastaukset tämän perusteella.



a) $g'(x) = 0$, kun $x = -2$ tai kun $x = 3$.

b) $g'(x) > 0$, kun $x < -2$ tai kun $x > 3$.

b) $g'(x) \leq 0$, kun $-2 \leq x \leq 3$.

Vastaus

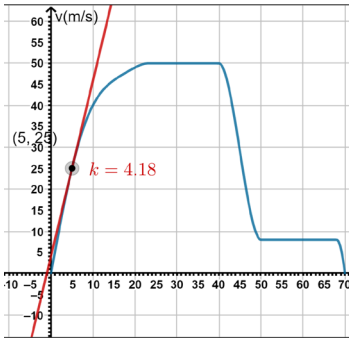
a) $x = -2$ tai $x = 3$

b) $x < -2$ tai $x > 3$

c) $-2 \leq x \leq 3$

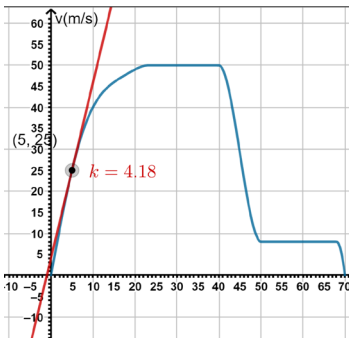
4.17

- a) Hyppääjän nopeus luetaan kuvaajan pisteen v -koordinaatista.



Kun $t = 5,0$ s, hyppääjän nopeus on 25 m/s.

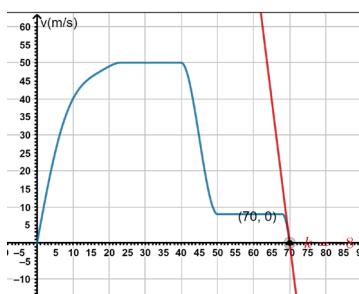
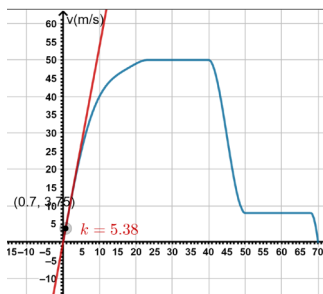
- b) Nopeuden muutosnopeus (eli kiihtyvyys) hetkellä $t = 5,0$ s on nopeusfunktion derivaatta. Luetaan kuvaajan tangentin kulmakerroin kohdassa $t = 5,0$ s.



Tangentin kulmakerroin on noin 4,2. Hetkellä $t = 5,0$ s hyppääjän nopeus kasvaa nopeudella $4,2 \text{ m/s}^2$.

- c) Nopeuden suurin kasvunopeus on tangentin kulmakerroin kohdassa, jossa kuvaaja nousee jyrkimmin.
Nopeuden suurin vähenemisnopeus on tangentin kulmakerroin kohdassa, jossa kuvaaja laskee jyrkimmin.
Liikutellaan tangenttia kuvaajaa pitkin ja määritetään tangentin suurin

kulmakerroin ja pienin (negatiivinen) kulmakerroin.



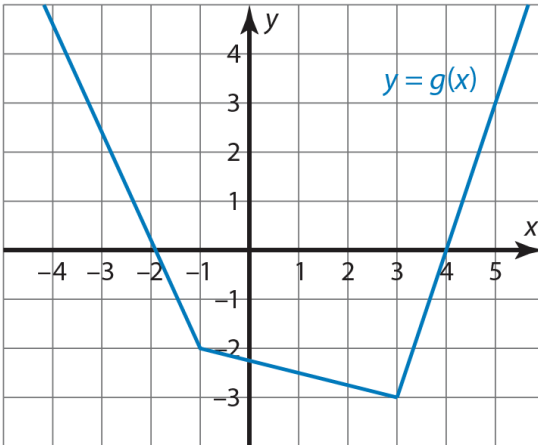
Tangentin suurin kulmakerroin löytyy kohdasta $t = 0,7$ s, eli $0,7$ s koneesta hyppäämisen jälkeen. (Nopeuden suurin kasvunopeus on noin $5,4 \text{ m/s}^2$.)

Tangentin pienin kulmakerroin löytyy kohdasta $t = 70,0$ s, eli maahanosumishetkellä. (Nopeuden suurin vähenemisnopeus on noin $8,0 \text{ m/s}^2$.)

Vastaus

- a) 25 m/s
- b) $4,2 \text{ m/s}^2$
- c) Kasvaa nopeimmin n. $0,7$ s koneesta hyppäämisen jälkeen, vähenee nopeimmin juuri maahanosumishetkellä $70,0$ s koneesta hyppäämisen jälkeen.

4.18



- a) Koska kohtiin $x = -1$ ja $x = 3$ ei voi piirtää kuvaajalle yksikäsitteistä tangenttia, derivaattaa ei ole olemassa kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$.
- b) Funktion kuvaaja koostuu suorista, joten funktion derivaatta on sama kuin suoran kulmakerroin niissä kohdissa, joissa derivaatta on olemassa.

$$x < -1: \quad g'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-2 - 2,4}{-1 - (-3)} = \frac{-4,4}{2} = -2,2$$

$$-1 < x < 3: g'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-3 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$x > 3: \quad g'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{0 - (-3)}{4 - 3} = \frac{3}{1} = 3$$

Vastaus

- a) derivaattaa ei ole olemassa kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$

b) $g'(x) \approx -2,2$, kun $x < -1$

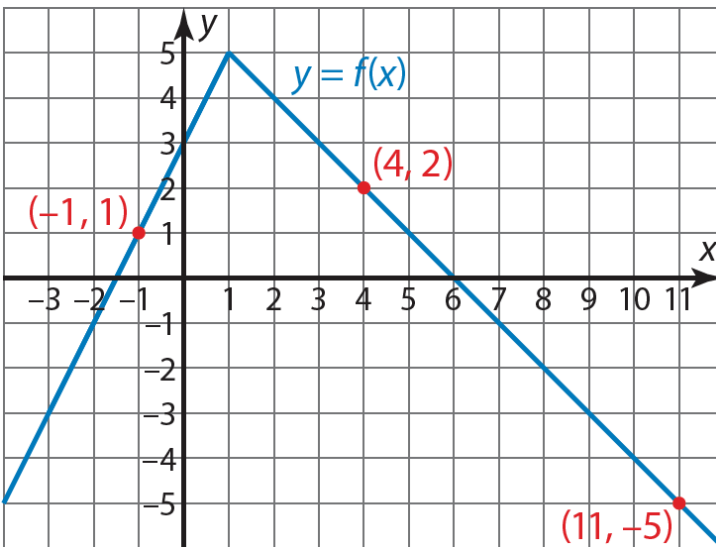
$$g'(x) \approx -\frac{1}{4}, \text{ kun } -1 < x < 3$$

$$g'(x) \approx 3, \text{ kun } x > 3$$

4.19

- 1) Koska $f(0) = 3$ ja $f'(x) = 2$, kun $x < 1$, niin alueessa $x < 1$ funktion kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 2 ja joka kulkee pisteen $(0, 3)$ kautta.
- 2) Koska funktion kuvaaja on katkeamaton murtoviiva ja alueessa $x > 1$ $f'(x) = -1$, niin alueessa $x \geq 1$ funktion kuvaaja on puolisuora, jonka kulmakerroin on -1 ja joka jatkaa katkeamatta kohdassa 1 piirrettyä suoraa.

Piirretään kuvaaja geometriaohjelmalla ja määritetään kuvaajalta pisteet, joissa $x = -1$, $x = 4$ ja $x = 11$.



Kuvaajan perusteella $f(-1) = 1$, $f(4) = 2$ ja $f(11) = -5$.

Vastaus

$f(-1) = 1$, $f(4) = 2$ ja $f(11) = -5$

4.20

$f(0) = 3$ ja $f(3) = 3$, joten funktion kuvaaja kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(3, 3)$ kautta.

$f'(x) > 0$, kun $x < 1$

$f'(x) < 0$, kun $1 < x < 3$ ja

$f'(x) > 0$, kun $x > 3$,

joten funktion kuvaaja nousee alueessa $x < 1$,

laskee alueessa $1 < x < 3$ ja

nousee alueessa $x > 3$.

Koska $f'(x) = 0$, kun $x = 1$ ja $x = 3$, niin kuvaajalla on ”mäenhuippu” kohdassa $x = 1$ ja ”kuopan pohja” kohdassa $x = 3$.

Kuvaajaksi kelpaa esimerkiksi oheinen kolmannen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(3, 3)$ kautta ja jolla on kohdassa $x = 1$ ”mäenhuippu”.

Kuvaajan voi hahmotella myös vapaalla kädellä, kunhan se toteuttaa annetut ehdot.

